

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 8

Wie viele Lösungen hat das folgende Gleichungssystem?

$$\begin{aligned}5x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 2x_4 &= 0 \\4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 &= 9 \\-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 5\end{aligned}$$

1. Lösungsweg

x_1	x_2	x_3	x_4		
5	2	-8	-2	0	I.
4	-4	3	1	9	II.
-2	1	1	1	0	III.
2	2	-3	1	5	IV.
1	6	-11	-3	-9	I.a = I. - II.
0	-2	5	3	9	II.a = 2 · III. + II.
0	3	-2	2	5	III.a = III. + IV.
0	-8	9	-1	-1	IV.a = -2 · IV. + II.
1	6	-11	-3	-9	I.b = I.a
0	1	3	5	14	II.b = II.a + III.a
0	0	-11	-13	-37	III.b = III.a - 3 · II.b
0	0	33	39	111	IV.b = IV.a + 8 · II.b
1	6	-11	-3	-9	I.c = I.b
0	1	3	5	14	II.c = II.b
0	0	-11	-13	-37	III.c = III.b
0	0	0	0	0	IV.c = 3 · III.b + IV.b

Aus der letzten Zeile folgt, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

2. Lösungsweg

x_1	x_2	x_3	x_4		
5	2	-8	-2	0	
4	-4	3	1	9	
-2	1	1	1	0	
2	2	-3	1	5	
1	6	-11	-3	-9	I.a = I. - II.
4	-4	3	1	9	
-2	1	1	1	0	
2	2	-3	-1	5	
1	6	-11	-3	-9	
0	-28	47	13	45	II.a = -4 · I.a + II.
0	13	-21	-5	-18	III.a = 2 · I.a + III.
0	-10	19	7	23	IV.a = -2 · I.a + IV.
1	6	-11	-3	-9	I.b = I.a
0	-1	1,9	0,7	2,3	II.b = IV.a : 10
0	13	-21	-5	-18	
0	-28	47	13	45	IV.b = II.a
1	6	-11	-3	-9	
0	-1	1,9	0,7	2,3	
0	0	3,7	4,1	11,9	III.b = 13 · II.b + III.a
0	0	-6,2	-6,6	-19,4	IV.c = -28 · II.b + IV.b
1	6	-11	-3	-9	
0	-1	1,9	0,7	2,3	
0	0	3,7	4,1	11,9	
0	0	0	1	2	IV.d = 6,2 · III.b + 3,7 · IV.c

Aus der Stufenform folgt nun: Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung. Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?