

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 2

Hinweis: Mitverfasser der Aufgabe ist MATTHIAS BENKESER, Ottersweier.

Die HIV-Rate bei Menschen, die sich vorsichtig verhalten, beträgt lediglich 0,01 %. Ein Aids-Test hat folgende sehr hohe Genauigkeiten: Wird eine infizierte Person getestet, ist der Test zu 99,9 % positiv. Umgekehrt ist das Testergebnis einer gesunden Person zu 99,99 % negativ.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine positiv getestete, vorsichtige Person tatsächlich infiziert?

1. Lösungsweg

Wir müssen also den Fall ausschließen, dass eine nicht infizierte Person positiv getestet wird. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$0,9999 \cdot 0,0001 = 0,00009999 .$$

Damit ergibt sich für die Gegenwahrscheinlichkeit

$$1 - 0,00009999 = 0,99990001 .$$

Antwort: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 99,990001 %.

2. Lösungsweg

Werden 10.000 Personen auf HIV getestet, so erhalten zwei einen positiven Test. Die eine, weil sie infiziert ist und die andere, weil ihr Test positiv ausfällt, obwohl sie nicht infiziert ist. In beiden Fällen handelt es sich um einen Anteil von 0,01 % und von 10.000 ist dies 1.

Zwei Personen erhielten also einen positiven Test, infiziert ist aber nur die eine. Dies bedeutet:

Antwort: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 50 %.

3. Lösungsweg

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit positiv getestet und infiziert zu sein. Es ergibt sich

$$0,0001 \cdot 0,999 = 0,0000999.$$

Antwort: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 0,00999%.

Die drei Lösungswege haben zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?